Wagi obiektywne
dla grupowego wspomagania decyzji
z danymi przedziałowymi

Dariusz Kacprzak

Politechnika Białostocka
Wydział Informatyki
Katerdra Matematyki
d.kacprzak@pb.edu.pl

MZBO 2020
ORMA 2020

Klasyczna metoda TOPSIS (Hwang, Yoon, 1981)

$\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ – zbiór wariantów decyzyjnych

$\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ – zbiór kryteriów (*B* i *C*)

Macierz decyzyjna

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Wektor wag kryteriów

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

Hwang, C.L.; Yoon, K. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*; Springer-Verlag, Berlin, 1981.

Normalizacja (wektorowa) macierzy decyzyjnej

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}$$

dla $j = 1, \dots, n$

Ważona znormalizowana macierz decyzyjna

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$v_{ij} = w_j \cdot y_{ij}$$

dla $i = 1,2,\dots,m$ i $j = 1,2,\dots,n$

Ideał

$$A^{+} = (v_1^{+}, v_2^{+}, \dots, v_n^{+}) = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in B \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in C \right) \right\}$$

i antyideał

$$A^{-} = (v_1^{-}, v_2^{-}, \dots, v_n^{-}) = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in B \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in C \right) \right\}$$

Odległości wariantów A_i $(i = 1, \dots, m)$ od ideału A^+

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^+\right)^2}$$

i od ideału A^-

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^-\right)^2}$$

Współczynnik względnej bliskości do ideału A^+

$$RCC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$$

Ranking wariantów i wskazanie najlepszego.

Metoda entropii (Hwang, Yoon, 1981)

Normalizacja (liniowa) macierzy decyzyjnej

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}}$$

dla $j = 1, \dots, n$

Wyznaczenie wektora entropii

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

gdzie

$$e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ln y_{ij}$$

dla $j = 1, \ldots, n$

Jeżeli $y_{ij} = 0$ dla pewnego i, przyjmujemy $y_{ij} \ln y_{ij} = 0$.

Wyznaczenie wektora zróżnicowania

$$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

gdzie

$$d_j = 1 - e_j$$

dla $j = 1, .., n$

Wyznaczenie wektora wag

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

gdzie

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

dla $j = 1, \dots, n$

1. Jahanshahloo, G.R.; Hosseinzadeh Lofti, F.; Izadikhah, M. An Algorithmic Method to Extend TOPSIS for Decision Making Problems with Interval Data, *Appl. Math. Comput.*, **2006**, *175*, 1375-1384.
2. Jahanshahloo, G.R.; Hosseinzadeh Lotfi, F.; Davoodi, A.R. Extension of TOPSIS for decision-making problems with interval data: Interval efficiency, *Math. Comput. Model.*, **2009**, *49*, 1137–1142.
3. Jahanshahloo, G.R.; Khodabakhshi, M.; Hosseinzadeh Lotfi, F.; Moazami Goudarzi, M.R. Across-efficiency model based on super-efficiency for ranking units through the TOPSIS approach and its extension to the interval case, *Math. Comput. Model.*, **2011**, *53*, 1946–1955.
4. Ye, F.; Li, Y.N. Group multi-attribute decision model to partner selection in the formation of virtual enterprise under incomplete information, *Expert Syst. Appl.*, **2009**, *36*, 9350–9357.
5. Tsaur, R.C. Decision risk analysis for an interval TOPSIS method, *Appl. Math. Comput.*, **2011**, *218*, 4295–4304.
6. Yue, Z. An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers, *Knowl. Based Syst.*, **2011**, *24*, 146–153.

Dymova, L.; Sevastjanov, P.; Tikhonenko, A. A direct interval extension of TOPSIS method, *Expert Syst. Appl.*, **2013**, *40*, 4841–4847.

Hosseinzadeh Lotfi, F.; Fallahnejad, R. Imprecise Shannon's Entropy and Multi Attribute Decision Making, *Entropy*, **2010**, *12*, 53-62.

Skala - {1,2,3,4,5}

Przykład 1.

$$X_1 = \begin{array}{c} DM_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}, \quad X_2 = \begin{array}{c} DM_2 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$X_{ART} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2.5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{w_{ART} = (1, 0)}$$

$$\boldsymbol{w_{PA} = (0.5921, 0.4079)}$$

Skala - {1,2,3,4,5}

Przykład 2.

$$X_1 = \begin{array}{c} DM_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}, \quad X_2 = \begin{array}{c} DM_2 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$X_{ART} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{w_{ART}} = ?$$

$$\boldsymbol{w_{PA} = (0.6497, 0.3503)}$$

Liczba przedziałowa (LP)

$$\left[\underline{a},\overline{a}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underline{a}\leq x\leq\overline{a}\right\}$$

Zakładamy, że $\underline{a}>0$.

Niech dane będę dwie LP $\left[\underline{a},\overline{a}\right]$ i $\left[\underline{b},\overline{b}\right]$ oraz liczba rzeczywista $\lambda>0$.

Wówczas:

- $\left[\underline{a},\overline{a}\right]=\left[\underline{b},\overline{b}\right]$ jeżeli $\underline{a}=\underline{b}$ i $\overline{a}=\overline{b}$,
- $\left[\underline{a},\overline{a}\right]+\left[\underline{b},\overline{b}\right]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}]$,
- $\left[\underline{a},\overline{a}\right]-\left[\underline{b},\overline{b}\right]=\left[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}\right]$,
- $\left[\underline{a},\overline{a}\right]\cdot\left[\underline{b},\overline{b}\right]=[\underline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}]$,
- $\left[\underline{a},\overline{a}\right]/\left[\underline{b},\overline{b}\right]=[\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b}]$,
- $\lambda\cdot\left[\underline{a},\overline{a}\right]=\left[\lambda\cdot\underline{a},\lambda\cdot\overline{a}\right]$.

Moore, R.E.; Kearfott, R.B.; Cloud, M.J. *Introduction to Interval Analysis*; SIAM, Philadelphia, 2009.

Inna reprezentacja LP

$$\langle m([\underline{a},\overline{a}]);w([\underline{a},\overline{a}])\rangle$$

gdzie

$$m([\underline{a},\overline{a}])=\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2}$$

oraz

$$w([\underline{a},\overline{a}])=\frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}$$

$$[\underline{a},\overline{a}]\prec_{=}[\underline{b},\overline{b}]\text{ jeżeli }\begin{cases} m([\underline{a},\overline{a}])<m([\underline{b},\overline{b}]), & \text{gdy}\quad m([\underline{a},\overline{a}])\neq m([\underline{b},\overline{b}])\\ w([\underline{a},\overline{a}])\geq w([\underline{b},\overline{b}]), & \text{gdy}\quad m([\underline{a},\overline{a}])= m([\underline{b},\overline{b}])\end{cases}$$

oraz

$$[\underline{a},\overline{a}]\prec[\underline{b},\overline{b}]\text{ jeżeli }[\underline{a},\overline{a}]\prec_{=}[\underline{b},\overline{b}]\text{ i }[\underline{a},\overline{a}]\neq[\underline{b},\overline{b}]$$

Hu, B.Q.; Wang, S. A Novel Approach in Uncertain Programming Part I: New Arithmetic and Order Relation for Interval Numbers, *J. Ind. Manag. Optim.*, **2006**, *2*, 351-371.

Proponowana metoda

$\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ – zbiór wariantów decyzyjnych

$\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ – zbiór kryteriów

$\{DM_1, DM_2, \dots, DM_K\}$ – zbiór decydentów / ekspertów

$$X^k = \begin{array}{c} \boldsymbol{DM_k} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11}^k & x_{12}^k & \cdots & x_{1n}^k \\ x_{21}^k & x_{22}^k & \cdots & x_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^k & x_{m2}^k & \cdots & x_{mn}^k \end{pmatrix} \end{array}$$

gdzie

$$x_{ij}^k = \left[\underline{x}_{ij}^k, \overline{x}_{ij}^k\right]$$

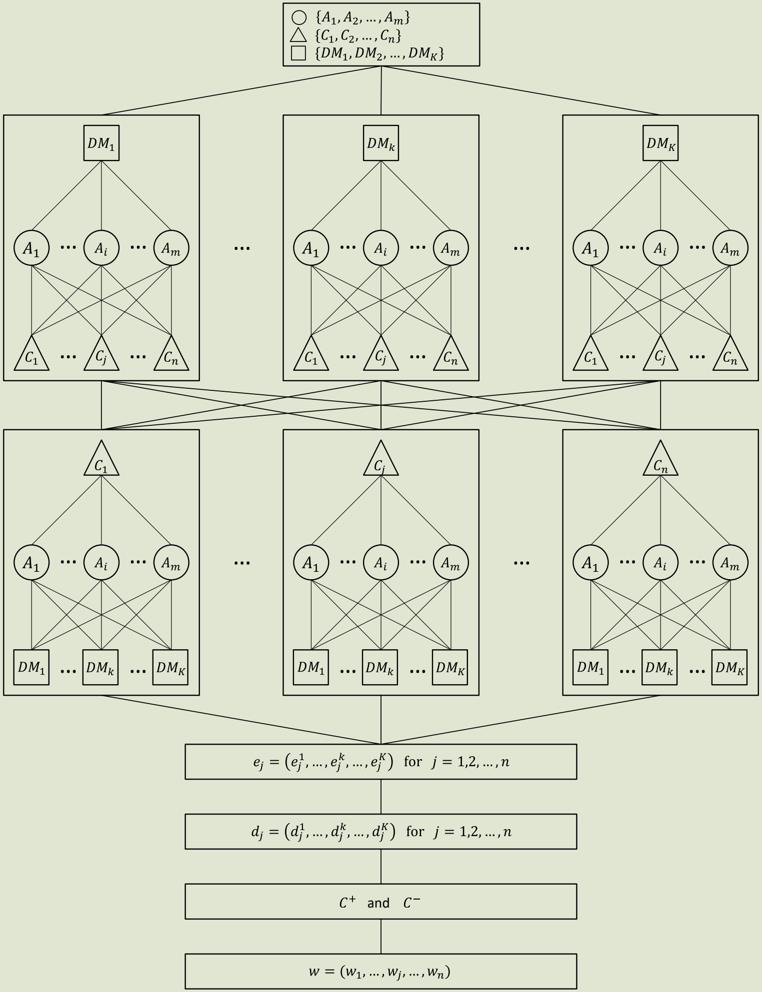
Wyznaczanie wag obiektywnych kryteriów

Przedziałowa entropia

1. Normalizacja macierzy decyzyjnych dla każdego decydenta
2. Konstrukcja znormalnianej macierzy decyzyjnej dla każdego kryterium
3. Wyznaczenie wektora entropii dla każdego kryterium
4. Wyznaczenie wektora zróżnicowania dla każdego kryterium
5. Konstrukcja macierzy zróżnicowania

Przedziałowa TOPSIS

1. Określenie najlepszego i najgorszego kryterium
2. Obliczenie odległości każdego wiersza macierzy zróżnicowania od najlepszego i najgorszego kryterium
3. Obliczenie współczynnika względnej bliskości każdego wiersza macierzy zróżnicowania od najgorszego kryterium
4. Wyznaczenie wag obiektywnych


$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$
$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$
$\{DM_1, DM_2, \ldots, DM_K\}$
DM_1
DM_k
DM_K
A_1 … A_i … A_m
C_1 … C_j … C_n
C_1
C_j
C_n
DM_1 … DM_k … DM_K
$e_j = (e_j^1, \ldots, e_j^k, \ldots, e_j^K)$ for $j = 1,2, \ldots, n$
$d_j = (d_j^1, \ldots, d_j^k, \ldots, d_j^K)$ for $j = 1,2, \ldots, n$
C^+ and C^-
$w = (w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_n)$

Normalizacja macierzy decyzyjnych

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{DM_k} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{matrix} \\ Y^k = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} y_{11}^k & y_{12}^k & \cdots & y_{1n}^k \\ y_{21}^k & y_{22}^k & \cdots & y_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^k & y_{m2}^k & \cdots & y_{mn}^k \end{pmatrix} \end{array}$$

dla każdego $j = 1, \ldots, n$

$$y_{ij}^k = \begin{cases} \left[\dfrac{\underline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m \overline{x}_{ij}^k}, \dfrac{\overline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m \overline{x}_{ij}^k} \right] & \text{gdy} \quad j \in B \\ \left[\dfrac{1/\overline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m 1/\underline{x}_{ij}^k}, \dfrac{1/\underline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m 1/\underline{x}_{ij}^k} \right] & \text{gdy} \quad j \in C \end{cases}$$

Konstrukcja macierzy kryteriów dla każdego C_j $(j = 1,2,\dots,n)$

$$V^j = \begin{array}{c} C_j \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} DM_1 & DM_2 & \cdots & DM_K \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_{1j}^1 & y_{1j}^2 & \cdots & y_{1j}^K \\ y_{2j}^1 & y_{2j}^2 & \cdots & y_{2j}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{mj}^1 & y_{mj}^2 & \cdots & y_{mj}^K \end{pmatrix} \end{array}$$

Wyznaczenie wektora entropii dla każdego C_j $(j = 1,2, \dots, n)$

$$e_j = \left(e_j^1, e_j^2, \dots, e_j^K\right)$$

gdzie

$$e_j^k = \left[\underline{e}_j^k, \overline{e}_j^k\right]$$

dla $k = 1,2, \dots, K$ oraz

$$\underline{e}_j^k = \min\left\{-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m} \underline{y}_{ij}^k \ln \underline{y}_{ij}^k, -\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_{ij}^k \ln \overline{y}_{ij}^k\right\}$$

i

$$\overline{e}_j^k = \max\left\{-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m} \underline{y}_{ij}^k \ln \underline{y}_{ij}^k, -\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_{ij}^k \ln \overline{y}_{ij}^k\right\}$$

Definiujemy $\underline{y}_{ij}^k \ln \underline{y}_{ij}^k = 0$ lub $\overline{y}_{ij}^k \ln \overline{y}_{ij}^k = 0$ jeżeli $\underline{y}_{ij}^k = 0$ lub $\overline{y}_{ij}^k = 0$

Wyznaczenie wektora zróżnicowania dla każdego C_j $(j = 1,2, \dots, n)$

$$d_j = \left(d_j^1, d_j^2, \dots, d_j^K\right)$$

gdzie

$$d_j^k = 1 - e_j^k = \left[1 - \overline{e}_j^k, 1 - \underline{e}_j^k\right]$$

dla $k = 1,2, \dots, K$

Budowa macierzy zróżnicowania

$$D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} DM_1 & DM_2 & \cdots & DM_K \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{array} & \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^K \\ d_2^1 & d_2^2 & \cdots & d_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n^1 & d_n^2 & \cdots & d_n^K \end{pmatrix} \end{array}$$

Wyznaczenie ideałów

$$C^{+} = (c_1^{+}, c_2^{+}, \ldots, c_K^{+})$$

gdzie

$$c_k^{+} = \max_j d_j^k$$

dla $k = 1,2, \ldots, K$ oraz

$$C^{-} = (c_1^{-}, c_2^{-}, \ldots, c_K^{-})$$

gdzie

$$c_k^{-} = [0,0]$$

dla $k = 1,2, \ldots, K$

Obliczanie odległości wierszy macierzy D reprezentujących wagi kryteriów od ideałów

$$d_j^{C+} = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left[\left(\underline{d}_j^k - \underline{c}_k^+\right)^2 + \left(\overline{d}_j^k - \overline{c}_k^+\right)^2\right]}$$

$$d_j^{C-} = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left[\left(\underline{d}_j^k - \underline{c}_k^-\right)^2 + \left(\overline{d}_j^k - \overline{c}_k^-\right)^2\right]}$$

Obliczenie współczynników względnej bliskości do ideału C^+

$$RCC_j^C = \frac{d_j^{C^-}}{d_j^{C^+} + d_j^{C^-}}$$

dla każdego $j = 1, \ldots, n$

Wyznaczenie wektora wag obiektywnych

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

gdzie

$$w_j = \frac{RCC_j^C}{\sum_{j=1}^{n} RCC_j^C}$$

dla $j = 1,2, \ldots, n$

Dziękuję za uwagę